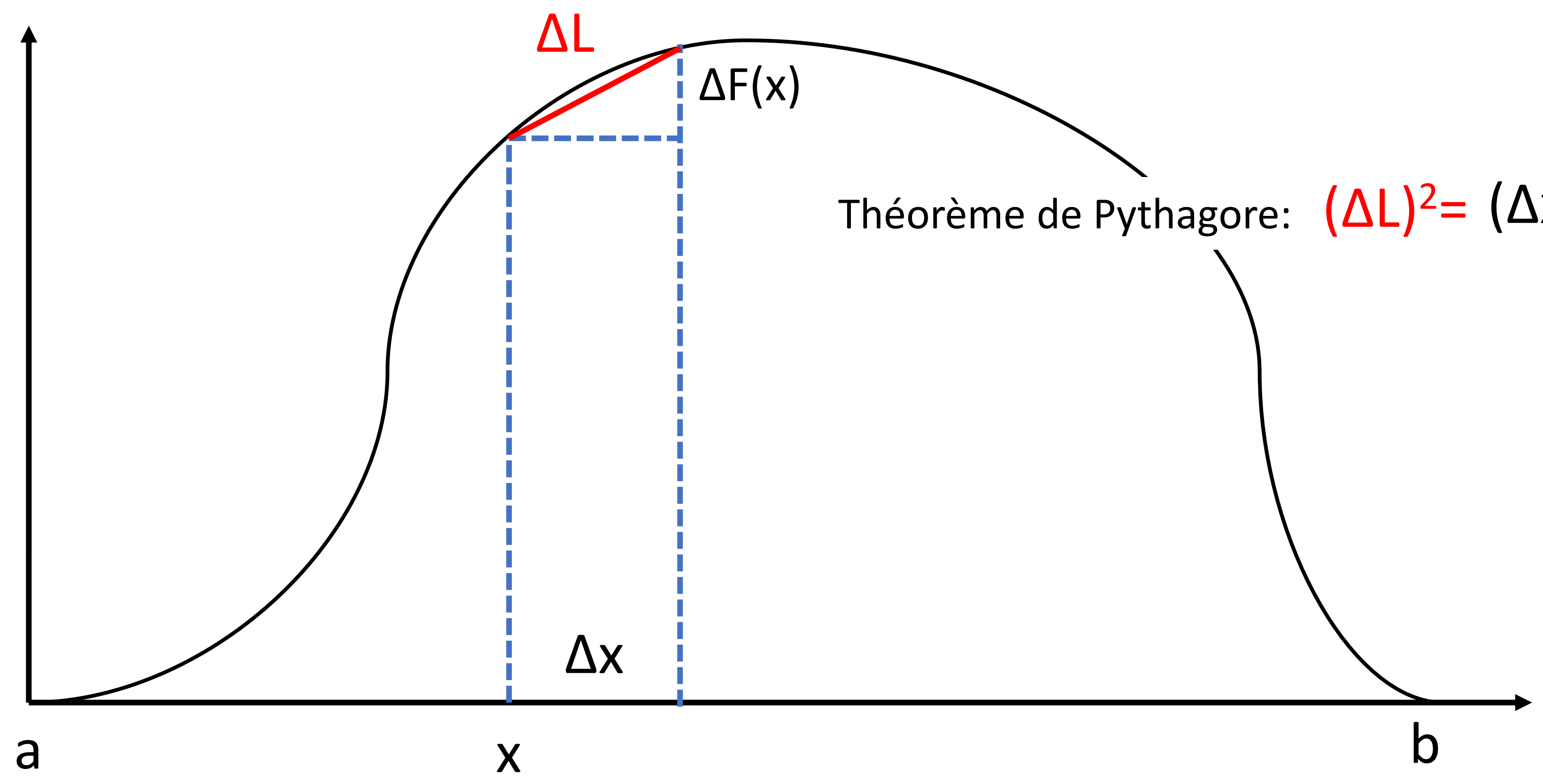
Longueur (rectification) d'une courbe continue

(une seule valeur finie de la dérivée en chaque point de l'intervalle)

JMC

27/03/23

Le problème



Théorème de Pythagore: $(\Delta L)^2 = (\Delta x)^2 + \Delta F(x)^2$

Formule générale (F(x) continue)

$Eq.1$ $(\Delta L)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta F)^2$

$Eq.2$ $\frac{(\Delta L)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta F)^2}{(\Delta x)^2} \rightarrow \left(\frac{\Delta L}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta F}{\Delta x}\right)^2$

$Eq.3$ $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\left(\frac{\Delta L}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta F}{\Delta x}\right)^2\right) \rightarrow L' = \sqrt{1 + (F')^2}$

$$\boxed{L_{ab} = \int_a^b \sqrt{1 + (F(x)')^2}\,dx}$$

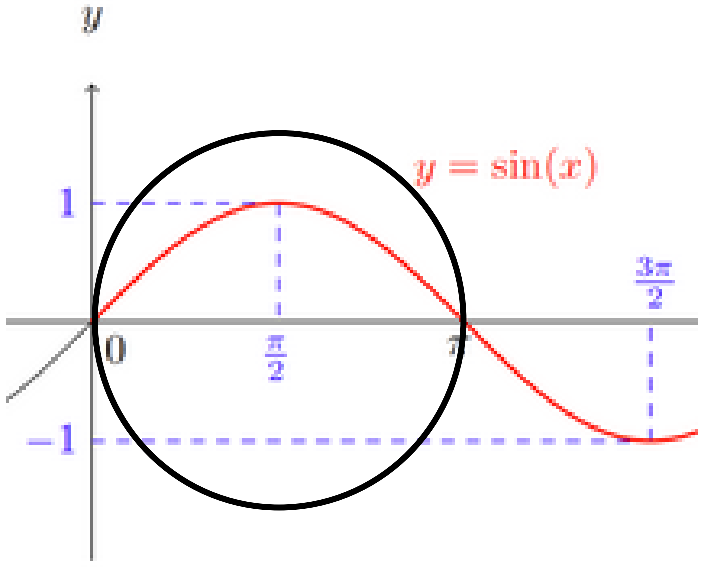
$si\ F(x) = \sin x$ $L_{ab} = \int_a^b \sqrt{1 + (\cos(x))^2}\,dx$ $= \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}\,dt$ (avec t=cos(x))

Application numérique

$si\ F(x) = \sin x$ $$L_{0\,\pi} = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (\cos(x))^2}\,dx = 3{,}82019778902771201790476208217 08$$

Soit un allongement du trajet par rapport à la ligne droite (π) de ≈ 1,2160

$si\ F(x)$ est un arc de cercle de Ø = π,
la longueur de l'arc est $(\pi^2)/2$, Soit un allongement du trajet par rapport à la ligne droite (π) est donc de π/2 ≈ 1,5708



Remarque: la courbe du sinus est donc beaucoup plus « écrasée » sur son support que le cercle

Autres fonctions F(x) simples

$F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$ $F'(x) = \sqrt{x}$ $\boxed{L_{ab} = \int_a^b \sqrt{1+x}\,dx}$

$\mathrm{P}(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$

$L_{0-1} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ =1,21895

$F(x) = \frac{1}{2} x^2$ $F'(x) = x$ $\boxed{L_{ab} = \int_a^b \sqrt{1+x^2}\,dx}$

$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + arcsinh(x)\right)$

$L_{0-1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + arcsinh(1)\right)$ = 1,14779

Cependant, dans la majorité des cas, le calcul de la longueur d'un arc est d'une rare complexité, voire impossible à calculer exactement par quadrature. On a recours à des développements en série que l'on intègre ensuite terme à terme, ou à l'usage de tables numériques. La rectification de l'ellipse fut un des premiers casse-têtes des mathématiciens du 17è siècle. La rectification d'un arc d'hyperbole ou de sinusoïde relève de la même complexité.

Voir par exemple: http://serge.mehl.free.fr/anx/long_arc.html pour un traitement plus rigoureux de ce problème.

Le calcul des primitives et des valeurs d'intégrales est fait ici: http://serge.mehl.free.fr/anx/long_arc.html